

## 12. Συμβολή κυμάτων

- 12.3.10 (1, 1, 1, ε)      12.3.11 (1, 1, 1, ε)      12.3.12 (1, 1, 1, ε)  
 12.3.13 (1, ε, 1, ε)      12.3.14 (1, ε, ε, 1)      12.3.15 (ε, 1, 1, 1)  
 12.3.16 (1, ε, ε, 1)      12.3.17 (ε, 1, 1, 1)      12.3.18 (1, ε, ε, 1)  
 12.3.19 (1, 1, ε, 1)      12.3.20 (1, 1, ε, 1)      12.3.21 (1, 1, ε, 1)  
 12.3.22 (1, ε, ε, 1)      12.3.23 A. (1, ε, 1) — B. (α)  
 12.3.24 (ε, 1, 1, ε)

12.3.25 A)  $r_1 - r_2 = 100 - 70 = 30 \text{ cm} = 1\lambda$

Σωστή η πρόταση (α)

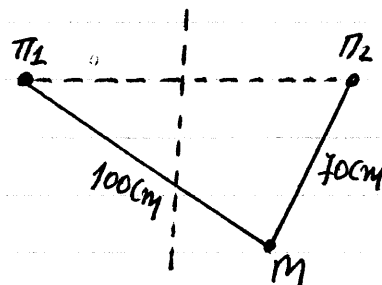
B)  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = 2\pi \frac{100 - 70}{30} = 2\pi$

Σωστή η πρόταση (α)

Γ)  $\psi_M = 2A \sin 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \sin(\omega t - 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2\lambda})$

$\Rightarrow \psi_M = 0,106 \sin(2\pi \frac{30}{2 \cdot 30}) \sin(100\pi t - 2\pi \frac{170}{2 \cdot 30}) \Rightarrow \psi_M = -0,106 \sin(100\pi t - \frac{17\pi}{3})$

ή  $\psi_M = 0,106 \sin(100\pi t - 14\pi/3)$  (S.E)



12.3.26 A.1-α,  $r_1 - r_2 = 3\lambda$  ενισχυτική συμβολή ( $k=3$ )

A.2-δύο,  $r_1 - r_2 = k\lambda$  (0:  $k=1, 2$ )

B. Αρχικά  $v = \lambda f$   
 Τελικά  $v = \lambda' f' = \lambda' \cdot 2f$  }  $\Rightarrow \lambda' \cdot 2f = \lambda f \Rightarrow \lambda = 2\lambda'$

$r_1 - r_2 = 3\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 3 \cdot 2\lambda' \text{ ή } r_1 - r_2 = 6\lambda' \quad (k=6)$

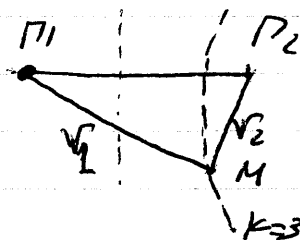
B.1-α. Σωστή η πρόταση (α). Ενισχυτική συμβολή

B.2 - ΠΕΝΤΕ. ( $k=1, 3, 4, 5$ )

12.3.27

A)  $r_1 - r_2 = k\lambda \xrightarrow{k=3} r_1 - r_2 = 3\lambda \text{ ή } r_1 - r_2 = 30 \text{ cm}$

B)  $v = \lambda f$   
 $v = \lambda' f' = \lambda' \cdot 2f$  }  $\Rightarrow \lambda' \cdot 2f = \lambda f \Rightarrow \lambda = 2\lambda'$   
 $\Rightarrow \lambda' = 5 \text{ cm}$



B.1)  $r_1 - r_2 = 30 \text{ cm} = 6 \cdot 5 = 6\lambda'$  ενισχυτική συμβολή

$A' = 2A = 8 \text{ cm}$ . Σωστή η πρόταση B.1-β

B.2 - Πέντε (οι  $k=1, 2, 3, 4, 5$ )

12.3.28

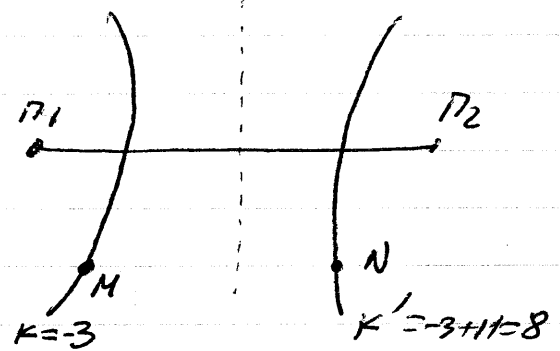
A - Σωστή ή (α)

$$\pi_1 M - \pi_2 M = -3\lambda = -3 \cdot 10 = -30 \text{ cm}$$

B -  $k' = -3 + 11 = 8$

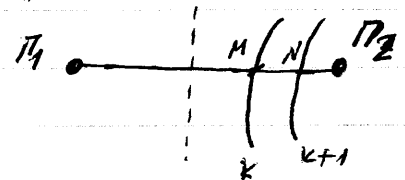
$$\pi_1 N - \pi_2 N = 8\lambda \text{ ή}$$

$$\pi_1 N - \pi_2 N = 80 \text{ cm.}$$



12.3.29 A) Σωστή ή προτάση (α)

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 M - \pi_2 N &= k\lambda \\ \pi_1 N - \pi_2 N &= (k+1)\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow MN = \frac{\lambda}{2}$$



$$B) \psi_M = 2A \cos 2\pi \frac{\pi_1 M - \pi_2 M}{2\lambda} \cos(\omega t - 2\pi \frac{\pi_1 \pi_2}{2\lambda}) \sim \psi_M = 2A \cos(k\pi) \cos(\omega t - \theta) \xrightarrow{k=2p}$$

$$\Rightarrow \psi_M = 2A \cos(\omega t - \theta) \quad (1)$$

$$\psi_N = 2A \cos 2\pi \frac{\pi_1 N - \pi_2 N}{2\lambda} \cos(\omega t - 2\pi \frac{\pi_1 \pi_2}{2\lambda}) \Rightarrow \psi_N = 2A \cos[(k+1)\pi] \cos(\omega t - \theta)$$

$$\xrightarrow{k=2p} \psi_N = 2A \cos[(2p+1)\pi] \cos(\omega t - \theta) \Rightarrow \psi_N = -2A \cos(\omega t - \theta)$$

$$\Rightarrow \psi_N = 2A \cos(\omega t - \theta + \pi) \quad (2)$$

Άρα  $\Delta\varphi = \pi$ . Σωστή ή προτάση (β)

A - (α) και B - (β)

12.3.30 A) Όπως σκέψα ενόχουσα A(β)

$$\pi_1 M - \pi_2 M = 35 - 65 = -30 = -3 \cdot 10 = -3\lambda$$

Το M είναι σε υπερβολή ενόχουσα ( $k=-3$ )

$$\pi_1 N - \pi_2 N = 80 - 20 = 60 = 6 \cdot 10 = 6\lambda$$

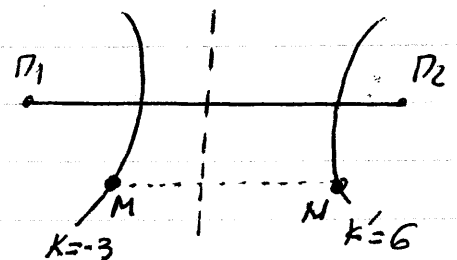
Το N είναι σε υπερβολή ενόχουσα ( $k=6$ )

$k' - k = 6 - (-3) = 9$ . Άρα η (κ') είναι η ένατη (9η) δεξιά ενόχουσα μετά την  $k=-3$  ... Υποθέτουμε B δεξιά ενόχουσα

B) Σωστή ή προτάση (α) - B(α)

$$\psi_M = -10 \cos(\omega t - 10\pi) \text{ ή } \psi_M = 10 \cos(\omega t - 9\pi) \quad \xrightarrow{\psi_M = 10}$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t - 9\pi) = 1 \text{ ή } \cos(\omega t) = -1 \quad (1)$$



$$\psi_N = 10 \mu \text{m} (\omega t - 10\pi) = 10 \mu \text{m} (\omega t) \xrightarrow{(1)} \psi_N = -10 \mu \text{m}$$

12.3.31. Α) - (β). Σωστή η πρόταση (β)

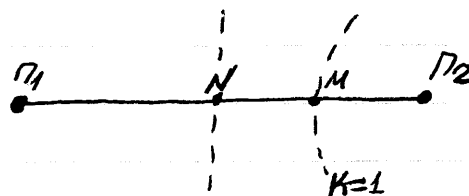
$$\begin{cases} \pi_1 M - \pi_2 M = 12 = 20 \mu \text{m} \\ \pi_1 M + \pi_2 M = 100 \mu \text{m} \end{cases} +$$

$$2(\pi_1 M) = 120 \mu \text{m} \text{ ή } (\pi_1 M) = 60 \mu \text{m} \Rightarrow (\pi_2 M) = 100 \mu \text{m}$$

Β) - (α). Σωστή η πρόταση (α)

$$\psi_N = 10 \mu \text{m} (\omega t - 5\pi)$$

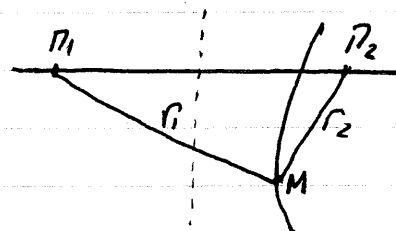
$$\psi_M = -10 \mu \text{m} (\omega t - 5\pi) \Rightarrow \psi_M = 10 \mu \text{m} (\omega t - 4\pi) \left. \vphantom{\psi_M} \right\} \text{άρα } \Delta\psi_{MN} = \pi$$



12.3.32. Αproxικά:  $r_1 - r_2 = k\lambda \xrightarrow{k=1} r_1 - r_2 = 1.2 (1)$

$$\text{Τελικά } r_1 - r_2 = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \xrightarrow{k=0} r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} \xrightarrow{(1)} \lambda = \frac{\lambda}{2} \text{ ή}$$

$$\text{ή } \lambda = 2\lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{f} = 2 \frac{\lambda}{f} \text{ ή } f = \frac{f}{2}$$



$$\Delta f = f' - f = \frac{f}{2} - f \text{ ή } \Delta f = -\frac{f}{2}$$

$$\text{Ποσοστό μεταβολής } \frac{\Delta f}{f} \cdot 100\% = -50\% \text{ . Μεταβολή } 50\%$$

12.3.33. Αληθής τα γεγονότα. -

$$\psi_1 = 0,1 \mu \text{m} (20t - 4x)$$

$$\psi_2 = 0,1 \mu \text{m} (20t - 4x + \pi) = -0,1 \mu \text{m} (20t - 4x) \left. \vphantom{\psi_2} \right\} \Rightarrow \psi = \psi_1 + \psi_2 = 0$$

12.3.34. Η πρόταση είναι σωστή. Το φέγγο που το λαμβάνουμε είναι  $A_1 = 2A = 0,06 \text{ W}$ , άρα η απορρόφηση γίνεται να είναι  $-0,06 \leq \psi_M \leq 0,06$ .

12.3.35. Σωστή η πρόταση (α). (Βλέπε 12.3.7

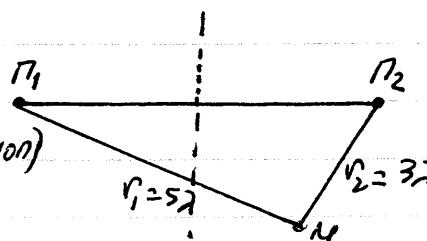
12.3.36. Σωστή η πρόταση (α)

$$\psi_{1M} = 0,04 \mu \text{m} (100\pi t - 2\pi \cdot 5\lambda) = 0,04 \mu \text{m} (100\pi t - 10\pi)$$

$$\psi_{2M} = 0,04 \mu \text{m} (100\pi t - 2\pi \cdot \frac{3}{2} \lambda) \Rightarrow$$

$$\psi_{2M} = 0,04 \mu \text{m} (100\pi t - 5\pi)$$

$$\psi_M = \psi_{1M} + \psi_{2M} = 0,04 \mu \text{m} (100\pi t - 10\pi) + 0,04 \mu \text{m} (100\pi t - 5\pi)$$



$$\psi_M = 0,04 \mu\text{m}(100\pi t) - 0,04 \mu\text{m}(100\pi t) = 0 \quad \text{ή} \quad \psi_M = 0 \quad (\text{απόβλεψη})$$

(βλέπε και 12.3.7)

12.3.37 Σωστή η πρόταση (δ)

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1M} &= 0,03 \mu\text{m} \left( 100\pi t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \\ \psi_{2M} &= 0,03 \mu\text{m} \left( 100\pi t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Διαφορά} \\ \text{φάσης} \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Το Μ επιφέρει σύνθετη ταλάντωση

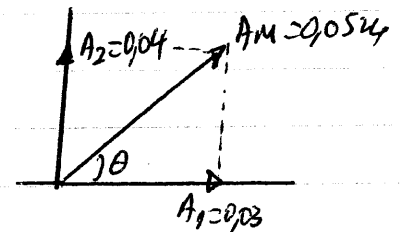
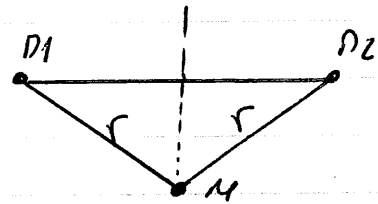
με ελάχιστη ταλάντωση τις  $\psi_{1M}, \psi_{2M}$

που έχω διαφορά φάσης  $\Delta\varphi = \pi/2$ .

$$\text{Πράτο} \quad A_M = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \Rightarrow A_M = 0,05 \mu\text{m}$$

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{3}$$

$$\psi_M = A_M \mu\text{m} \left( 100\pi t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \theta \right)$$



12.3.38 Σωστή η πρόταση (β). (βλέπε και 12.3.7)

$$\psi_M = 0,03 \mu\text{m} \left( 100\pi t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \quad \text{ή}$$

$$\psi_{1M} = 0,03 \mu\text{m} \left( 100\pi t + 0,5\pi - \frac{2\pi \cdot 3,75\lambda}{\lambda} \right) \quad \text{ή}$$

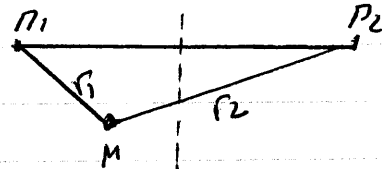
$$\psi_{1M} = 0,03 \mu\text{m} (100\pi t - 4\pi) \quad (1)$$

$$\psi_{2M} = 0,04 \mu\text{m} \left( 100\pi t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi \cdot 4,25\lambda}{\lambda} \right) = 0,04 \mu\text{m} (100\pi t - 0,5\pi - 20,375\pi) \quad \text{ή}$$

$$\psi_{2M} = 0,04 \mu\text{m} (100\pi t - 0,5\pi - 7,5\pi) \Rightarrow \psi_{2M} = 0,04 \mu\text{m} (100\pi t - 8\pi) \quad (2)$$

Το Μ εκτελεί σύνθετη ταλάντωση με ελάχιστη τις (1) και (2) που έχω  
'διαφορά φάσης'  $\Delta\varphi = 4\pi$ . και

πράτο) σύνθετη ταλάντωση



$$A_M = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} = \sqrt{0,03^2 + 0,04^2 + 2 \cdot 0,03 \cdot 0,04 \cdot \cos 4\pi}$$

$$\Rightarrow A_M = \sqrt{(0,03 + 0,04)^2} \quad \text{ή} \quad A_M = 0,07 \mu\text{m}.$$

12.3.39 Α. Σωστή η πρόταση (α).

$$A_M = \left| 2A \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right| = \left| 2A \cos \frac{\pi}{3} \right| = A = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}.$$

Β. Σωστή η πρόταση (α)

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{15} \quad \text{ή} \quad r_1 - r_2 = 5 \text{ cm}$$

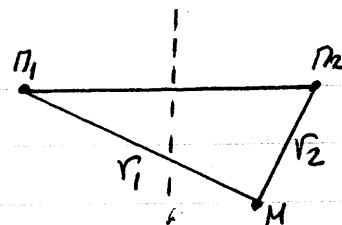
} βλέπε  
12.3.2

12.3.40

Α. Σωστή η πρόταση 1.

$$\Gamma_1 M - \Gamma_2 M = 90 \cdot 72 = 18 = 1 \cdot 18 \Rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2 = 1\lambda \quad (1)$$

Άρα το Μ είναι σε υπερβολή ελκυστική



Β. Σωστή η πρόταση (δ)

Για κρούση γ/α ταλαντώσεως ο φελλός έχει ενέργεια  $E = \frac{1}{2} D A^2$  ή

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 9 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Για την συνδυαστική ταλάντωση ο φελλός έχει πλάτος  $A_M = 2A$  και ενέργεια

$$E' = \frac{1}{2} D A_M^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (2A)^2 = 4 \left( \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \right) = 4 \cdot 9 \cdot 10^3 \text{ J} \Rightarrow E' = 36 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Γ. Σωστή η πρόταση (δ).

$$T' = 3T \Rightarrow f' = \frac{f}{3} \text{ και } \omega' = \frac{\omega}{3}$$

$$v = \lambda f$$

$$v = \lambda' f' = \lambda' \cdot \frac{f}{3} \Rightarrow \lambda f = \lambda' \cdot \frac{f}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda'}{3} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2 = 1\lambda \xrightarrow{(2)} \Gamma_1 - \Gamma_2 = \frac{\lambda'}{3}$$

$$A_M = \left| 2A \sin 2\pi \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2\lambda'} \right| = \left| 2A \sin \pi \frac{\lambda/3}{\lambda'} \right| = A$$

Άρα η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$E'' = \frac{1}{2} m \omega'^2 A_M^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{\omega}{3} \right)^2 A^2 = \frac{1}{9} \left( \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \right) \Rightarrow E'' = 1 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$12.3.41 \text{ A)} f = 50 \text{ Hz}, \lambda = \frac{v}{f} = \frac{25}{50} = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{A)} \Gamma_1 - \Gamma_2 = -1,5 = -3 \cdot \lambda. \text{ Το Μ ανήκει στην}$$

τρίτη υπερβολή ενδοκυκλική

της γεωκοδέται,  $A_M = 2A = 0,02 \text{ m}$  ή

$$A_M = \left| 2A \sin 2\pi \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2\lambda} \right| = 2A = 0,02 \text{ m}$$

$$\text{B)} t_1 = \frac{\Gamma_1}{v} = 0,200 \text{ s} \quad t_2 = \frac{\Gamma_2}{v} = 0,260 \text{ s}$$

Η απόσταση δίδεται ως ιδιότητα που προκύπτει όταν "αΐσθησε" των χρόνων

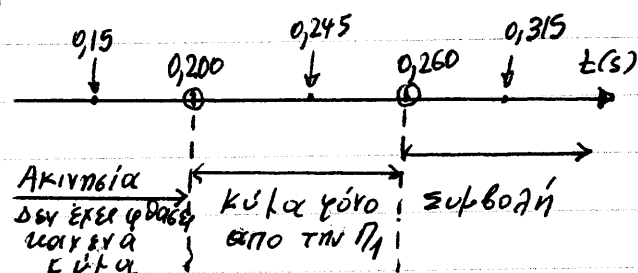
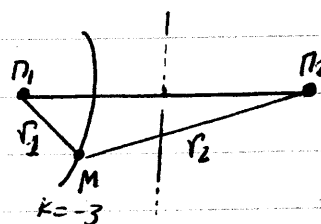
$$\text{B.1.) } t = 0,15 \text{ s} \Rightarrow \psi_M = 0$$

$$\text{B.2.) } \psi_M = \psi_{M,0} = 0,01 \text{ m} \left( 100\pi t - \frac{2\pi \cdot 5}{0,5} \right)$$

$$\Rightarrow \psi_M = 0,01 \text{ m} \left( 100\pi t - 20\pi \right)$$

$$\xrightarrow{t=0,245 \text{ s}} \psi_M = 0,01 \text{ m}$$

$$\text{B.3.) } \psi_M = 2A \sin 2\pi \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2\lambda} \text{ m} \left( 100\pi t - 2\pi \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\lambda} \right) \Rightarrow \psi_M = -0,02 \text{ m} \left( 100\pi t - 23\pi \right)$$



$$\eta' \psi_M = 0,02 \text{ m} \cdot (100\pi t - 22\pi) \xrightarrow{t=0,315} \psi_M = -0,02 \text{ m}$$

$$\Gamma.) v_{\max} = \omega A_M = 100\pi \cdot 0,02 \Rightarrow v_{\max} = 6,28 \text{ m/s}$$

Δ) δύο σημεία είναι ενίοτε (και) και τρις) από 68864)

$$12.3.42. \lambda = \frac{v}{f} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

$$Α) A_M = \left| 2A \cos 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right| = 2A \text{ ή } A_M = 0,04 \text{ m}$$

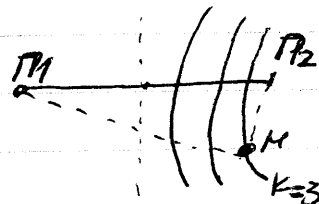
$$Β) \psi_M = -0,04 \text{ m} \cdot (20\pi t - 7\pi) \text{ ή } \psi_M = 0,04 \text{ m} \cdot (20\pi t - 6\pi)$$

$$v_M = 0,8 \text{ m/s} \cdot (20\pi t - 6\pi)$$

$$\Gamma) \text{ Για } t = \frac{73}{120} \text{ s} \Rightarrow \psi_M = 0,02 \text{ m}, D = m\omega^2 = 4 \text{ N/m}$$

$$\left. \begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2} D A_M^2 = 32 \cdot 10^{-4} \text{ J} \\ U_M &= \frac{1}{2} D \psi_M^2 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_M = 24 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Δ)  $\pi_1 M - \pi_2 M = 50 - 20 = 30 = 3 \cdot 10 = 3 \cdot \lambda$ , Άρα το Μ ανήκει στην τρίτη ( $k=3$ ) υπερβολή ή ενίοτε (και) δεξιά του μέσου Κ θέτον



$$12.3.43. Α) \psi = \psi_1 + \psi_2 \Rightarrow \psi = 0,1 \text{ m} \cdot (100\pi t - 10\pi x) + 0,1 \text{ m} \cdot (100\pi t - 10\pi x + \frac{2\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = 0,1 \text{ m} \cdot (100\pi t - 10\pi x + \frac{2\pi}{3}) \dots \text{αρχονικά κέτω}$$

$$Β) \omega = 100\pi \Rightarrow f = 50 \text{ Hz}, 10\pi x = \frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}, v = \lambda f = 10 \text{ m/s}$$

$$\Gamma) v_{\max} = \omega A' = 100\pi \cdot 0,1 \text{ ή } v_{\max} = 31,4 \text{ m/s}$$

$$Δ) \psi_M(t) = 0,1 \text{ m} \cdot (100\pi t - 10\pi + \frac{2\pi}{3}) \xrightarrow{t=0,25} \psi_M = 0,05\sqrt{3} \text{ m}$$

$$12.3.44. Α) 1^{\circ} \text{ κύμα } \psi_{0,1} = 0,25\sqrt{2} \text{ m} \cdot (100\pi t) \text{ (Εξίσωση ταλάντωσης, ως αρχή)} \\ \text{και } \psi_1(x,t) = 0,25\sqrt{2} \text{ m} \cdot (100\pi t - 20\pi x) \text{ (S.t.)}$$

$$2^{\circ} \text{ κύμα: Εξίσωση ως προς } O(x=0). \psi_{0,2} = 0,25\sqrt{2} \text{ m} \cdot 100\pi(t - \frac{1}{200}) \Rightarrow$$

$$\psi_{0,2} = 0,25\sqrt{2} \text{ m} \cdot (100\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ και } \psi_2(x,t) = 0,25\sqrt{2} \text{ m} \cdot (100\pi t - 20\pi x + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.t.)}$$

$$Β) \psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) \Rightarrow \dots \psi(x,t) = 0,5 \text{ m} \cdot (100\pi t - 20\pi x + \frac{\pi}{4}) \text{ (S.t.)}$$

$$Β.2) A' = 0,5 \text{ m}, T = 0,02 \text{ s}$$

$$Β.3) \lambda = 0,1 \text{ m} \text{ και } v = \lambda f = 5 \text{ m/s}$$

$$\Gamma) \psi_M = 0,5 \text{ m} \cdot (100\pi t - 20\pi + \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{t = \frac{247}{1200} \text{ s}} \psi_M = 0,25 \text{ m}$$

$$Δ) v_M = \pm \omega \sqrt{A'^2 - \psi_M^2} = \pm 100\pi \cdot 0,4 \Rightarrow v_M = \pm 40\pi \text{ m/s}$$

$$Δ.2) \psi_M = 0,5 \text{ m} \cdot (100\pi t_1 - 20\pi x_1 + \frac{\pi}{4}) = 0,3 \text{ ή } \psi_M = 0,5 \text{ m} \cdot (100\pi t_1 - 20\pi x_1 + \frac{\pi}{4}) = 0,6$$

Τη χρονική στιγμή  $t = t_1 + 0,015$  έχουμε

$$\psi_M = 0,5 \text{ m} \cdot [100\pi(t_1 + 0,015) - 20\pi + \frac{\pi}{4}] \text{ ή } \psi_M = 0,5 \text{ m} \cdot (100\pi t_1 - 20\pi x_1 + \frac{\pi}{4} + \pi)$$

$$\Rightarrow \psi_N = -0,5 \cdot \mu \epsilon (100\pi t_1 - 20\pi x_N + \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{(1)} \psi_N = -0,30\mu$$

12.3.45 A) 1<sup>η</sup> κύμα  $\psi_1(x,t) = 0,5\mu\epsilon(100\pi t - 20\pi x)$  (SI)

2<sup>η</sup> κύμα: εξίσωση  $\psi_2(x,t) = 0,5\mu\epsilon(t - \frac{1}{3})$   $\Rightarrow \psi_2 = 0,5\mu\epsilon(\omega t - \frac{20\pi}{3})$

$\psi_{0,2} = 0,5\mu\epsilon(100\pi t - \frac{20\pi}{3})$  και  $\psi_2(x,t) = 0,5\mu\epsilon(100\pi t - 20\pi x - \frac{20\pi}{3})$

$\psi(x,t) = \psi_1 + \psi_2 \Rightarrow \dots \psi(x,t) = 0,5\mu\epsilon(100\pi t - 20\pi x - \frac{\pi}{3})$

B) Για  $t = 0,06$  s  $\Rightarrow 0,25 = 0,50\mu\epsilon(6\pi - 20\pi x - \frac{\pi}{3})$  απ' όπου

$\mu\epsilon(6\pi - 20\pi x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow 6\pi - 20\pi x - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 20\pi x = \frac{33\pi}{6} - 2\pi$

$\Rightarrow x = \frac{33 - 12k}{120}$  προφανώς  $x > 0 \Rightarrow 33 - 12k > 0 \Rightarrow k < 2,75$

άρα  $k = 0, 1, 2$  και  $x = \frac{33}{120}, \frac{21}{120}, \frac{9}{120}$

$\mu\epsilon(6\pi - 20\pi x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow 6\pi - 20\pi x - \frac{\pi}{3} = 2\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{29 - 12k}{120}$

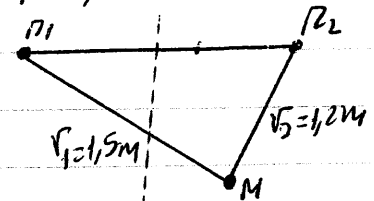
προφανώς  $x > 0 \Rightarrow 29 - 12k > 0 \Rightarrow k < 2,4$

άρα  $k = 0, 1, 2$  και  $x = \frac{29}{120}, \frac{17}{120}, \frac{5}{120}$  τελικά  $\psi = 0,25\mu$

6<sup>η</sup>) θέλουμε  $\frac{5}{120}, \frac{9}{120}, \frac{17}{120}, \frac{21}{120}, \frac{29}{120}, \frac{33}{120}$  m.

12.3.46  $T = 0,2$  s  $\Rightarrow f = 5$  Hz  $\Rightarrow \omega = 10\pi$  rad/s  $\lambda = v/f = 0,9$  m

A)  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = 2\pi \frac{1,5 - 1,2}{0,9} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$  (βλ. 12.3.2)



B)  $\psi_M = \psi_1 + \psi_2 \Rightarrow \dots \psi_M(t) = 0,05\mu\epsilon(10\pi t - 3\pi)$

$A_M = 0,05\mu$ ,  $T = \frac{2\pi}{10\pi} = 0,2$  s,  $\varphi_M(t) = 10\pi t - 3\pi$

Γ)  $D = m\omega^2 = 10^{-3}(10\pi)^2 \Rightarrow D = 1$  N/m

$E_M = \frac{1}{2} D A_M^2 = 125 \cdot 10^{-4}$  J  $\Rightarrow K = 4,5 \cdot 10^{-4}$  J

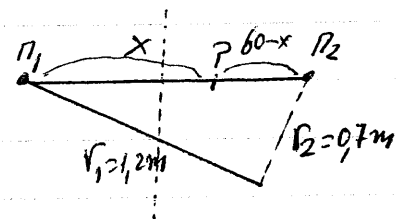
$U_D = \frac{1}{2} D \psi_M^2 = 8 \cdot 10^{-4}$  J

Δ)  $r_1 - r_2 = K\lambda' \Rightarrow 0,3 = K \frac{v}{f'} \Rightarrow 0,3 = K \frac{4,5}{f'} \Rightarrow f' = 15$  K,  $K = 1,33, \dots$

12.3.47  $\psi_{01} = \psi_{02} = 5\mu\epsilon(100\pi t)$  ( $y \rightarrow$  cm)

$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{5}{50} = 0,1$  m

α)  $t_1 = \frac{r_1}{v} = 0,24$  s  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Σύμφωνα εχόντες} \\ t_2 = \frac{r_2}{v} = 0,14 \text{ s} \end{array} \right\}$  άρα  $t \geq 0,24$  s



β)  $\psi_{1M} = 5\mu\epsilon(100\pi t - 24\pi)$ ,  $\psi_{2M} = 5\mu\epsilon(100\pi t - 14\pi)$  ( $y \rightarrow$  cm)

δ)  $A_M = |2A \cos 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}| = |2A \cos 5\pi| = 2A = 10\mu\epsilon = 0,1$  m.

δ)  $\psi_M(t) = 2A \cos 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \cos(\omega t - 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}) \Rightarrow \psi_M = -0,1 \cos(1000t - 19\pi) \Rightarrow$   
 $\psi_M(t) = 0,1 \cos(1000t - 18\pi)$  (5.5)

ε)  $r_1 - r_2 = 1,2 - 0,7 = 0,5 = 5 \cdot \lambda$ , άρα το Μ ανήκει στην 5η υπερβολή ενίσχυσης (δεξιά τη) μεσοκαθέτου. Μετά από τον Μ και την μεσοκαθέτου υπάρχουν άλλες 4 υπερβολές ενίσχυσης

στ) Έστω σημείο Ρ την  $\Pi_1 \Pi_2$  για το οποίο έχουμε απόδοσης  
 προφανώς  $\Pi_1 P - \Pi_2 P = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$  ή  $x - (60 - x) = (2k+1) \frac{10}{2} \quad // \lambda = 10 \text{ cm}$   
 $\Rightarrow x = 5k + 32,5$  (1)

$0 \leq x \leq 60 \Rightarrow 0 \leq 5k + 32,5 \leq 60 \Rightarrow -6,5 \leq k \leq 5,5$  άρα

$k = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , δηλαδή έχουμε δώδεκα (12)

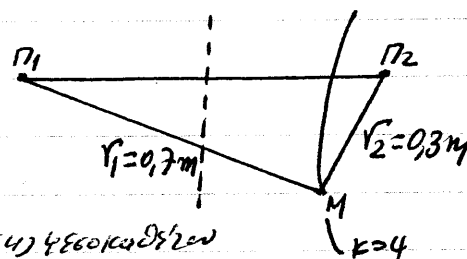
υπερβολές απόδοσης μεταξύ των  $\Pi_1, \Pi_2$ . Με συντηρητικότητα  
 στην (1) βρίσκουμε τις θέσεις στην  $\Pi_1 \Pi_2$  που έχουμε απόδοσης  
 $x = 2,5 \text{ cm} - 7,5 \text{ cm} - 12,5 \text{ cm} - 17,5 \text{ cm} - 22,5 \text{ cm} - 27,5 \text{ cm}$   
 $32,5 \text{ cm} - 37,5 \text{ cm} - 42,5 \text{ cm} - 47,5 \text{ cm} - 52,5 \text{ cm} - 57,5 \text{ cm}$

12.3048. Α)  $\lambda = \frac{v}{f} = 0,1 \text{ m}$ ,  $T = \frac{1}{f} = 0,02 \text{ s}$

Β.1)  $A_M = \dots = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$

$r_1 - r_2 = 0,4 = 4 \cdot 0,1 = 4 \cdot \lambda$ , άρα το Μ

ανήκει στην 4η υπερβολή ενίσχυσης δεξιά τη μεσοκαθέτου



Β.2)  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = 2\pi \frac{0,7 - 0,3}{0,1} \Rightarrow \Delta\varphi = 8\pi \text{ rad}$  (βλ 12.3.2)

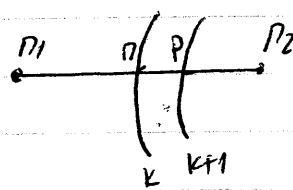
Β.3)  $\psi_M(t) = 0,1 \cos(1000t - 10\pi)$  (5.5)

Β.4)  $T_M = T = 0,02 \text{ s}$

Γ. Τρεις υπερβολές, ενίσχυσης ( $k=1,2,3$ )

• Τέσσερις υπερβολές απόδοσης ( $k=0,1,2,3$ )

Δ)  $\left. \begin{aligned} \Pi_1 \Pi - \Pi_2 \Pi &= k\lambda \\ \Pi_1 P - \Pi_2 P &= (k+1)\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(\Pi P) = \lambda \Rightarrow (\Pi P) = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow (\Pi P) = 0,05 \text{ m}$



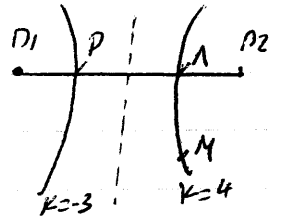
12.3049. Α)  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \lambda$  (1) (βλ 12.3.2)

$A_M = \left| 2A \cos 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right| \xrightarrow{(1)} A_M = \left| 2A \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right| = \left| 2A \cos 4\pi \right| = 2A$

$\Rightarrow A_M = 0,1 \text{ m}$



B) 1)  $\Rightarrow r_1 - r_2 = 4\lambda$ . Άρα το Μ ανήκει στην 4<sup>η</sup> υπερβολή επίκεντρος δεξιά της γεωκαθέτου.  
Μεταξύ Μ και γεωκαθέτου υπάρχουν 3 υπερβολές επίκεντρος



$$\left. \begin{aligned} r_1 - r_2 &= -3\lambda \\ r_1 - r_2 &= 4\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(PA) = 7\lambda \Rightarrow \lambda = 1\text{cm} = 0,1\text{m}$$

$$v = \lambda f = 0,1\text{m} \cdot 50\text{Hz} \Rightarrow v = 5\text{m/s}$$

D)  $\psi_M = 2A \cos(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda}) \sin(\omega t - 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}) \Rightarrow \psi_M = 0,10 \sin(100\pi t - \theta)$  (SI)  
όπου  $\theta = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}$

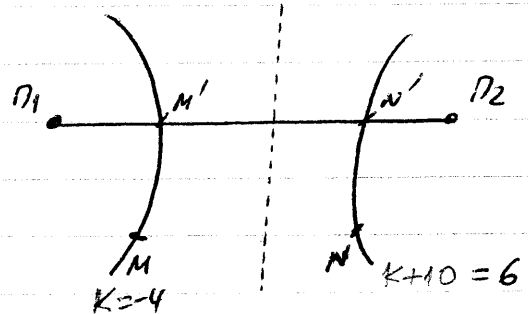
Για  $t = t_1$ ,  $\psi_M = 0,06 = 0,10 \sin(100\pi t_1 - \theta) \Rightarrow \sin(100\pi t_1 - \theta) = 0,6$  (1)

Για  $t = (t_1 + 0,05)$  έχουμε:  $\psi_M = 0,10 \sin[100\pi(t_1 + 0,05) - \theta] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi_M = 0,10 \sin(100\pi t_1 - \theta + 5\pi) \Rightarrow \psi_M = -0,10 \sin(100\pi t_1 - \theta) \xrightarrow{(2)}$$

$$\Rightarrow \psi_M = -0,06\text{m} \Rightarrow \psi_M = -6\text{cm}$$

12.3.50



$$\left. \begin{aligned} r_1M - r_2M &= -35 \Rightarrow (2k+1)\frac{\lambda}{2} = -35 \\ r_1N - r_2N &= 65 \Rightarrow [2(k+10)+1]\frac{\lambda}{2} = 65 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2k\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} &= -35 \\ 2k\frac{\lambda}{2} + 21\frac{\lambda}{2} &= 65 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 20\frac{\lambda}{2} = 100$$

$$\Rightarrow \lambda = 10\text{cm} = 0,1\text{m}$$

$$v = \lambda f = 0,1\text{m} \cdot 5\text{Hz} \Rightarrow v = 0,5\text{m/s}$$

B.1)  $r_1M' - r_2M' = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$

$$r_1N' - r_2N' = [2(k+10)+1]\frac{\lambda}{2} = k\lambda + 21\frac{\lambda}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} r_1M' - r_2M' &= k\lambda + \frac{\lambda}{2} \\ r_1N' - r_2N' &= k\lambda + 21\frac{\lambda}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(N'N') = 10\lambda \Rightarrow (N'N') = 5\lambda$$

$$\Rightarrow (N'N') = 0,5\text{m}$$

B.2) Μεταξύ Μ' και Ν' υπάρχουν

• 10 ευθεία εγκύβευ

• 9 ευθεία απόδευ

$$(2k+1)\frac{\lambda}{2} = -35 \Rightarrow \dots k = -4 \text{ και } k+10 = +6$$

Το Μ ανήκει στην 4<sup>η</sup> υπερβολή απόδευ, αριστερά της γεωκαθέτου

Το Ν ανήκει στην 6<sup>η</sup> υπερβολή απόδευ, δεξιά της γεωκαθέτου

Γ.1)  $\psi_P = 0,04 \sin(100\pi t - 12\pi)$

Γ.2)  $\psi_P = 0,04 \sin(100\pi \frac{12}{60} - 12\pi) \Rightarrow \psi_P = 0,02\text{m}$

Γ.3)  $v_P = 0,4\pi \sin(100\pi t - 12\pi) \Rightarrow v_P = 0,4\pi \sin(100\pi \frac{12}{60} - 12\pi) \Rightarrow v_P = 0,2\pi \sqrt{3}\text{m/s}$

$$\alpha_p = -\omega^2 \psi_p = -(10\pi)^2 \cdot (0,02) \Rightarrow \alpha_p = -20\pi^2/s^2$$

$$\delta.4) \psi_p = 0,04 \text{ m} \cos(10\pi t - 12\pi) = 0,04 \Rightarrow 10\pi t - 12\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 10\pi t = 2k\pi + 12,5\pi \Rightarrow t = \frac{2k+12,5}{10} \quad (1)$$

$$\text{Ευρεθείν στο } P \text{ έχουμε για } t \geq \frac{0,8\pi}{0,5\pi/s} \text{ ή } t \geq 1,6s \xrightarrow{(1)}$$

$$\frac{2k+12,5}{10} \geq 1,6 \text{ ή } 2k+12,5 \geq 16 \text{ ή } k \geq 1,75 \rightarrow k=2,3,\dots$$

$$\text{Για } k=2 \text{ η (1) δίδει } t=1,65s$$

$$12.3.51 \text{ A.1) } A_M = \left| 2A_0 \cos 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right| = 0,04 \text{ m}$$

$$\omega = 20\pi \text{ rad/s} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}, \lambda = \frac{v}{f} \text{ ή } \lambda = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{A.2) } \psi_{\max} = \omega A_M = 0,8\pi \text{ m/s}$$

$$\text{A.3) } r_1 - r_2 = 0,5 = 1 \cdot 0,5 \text{ ή } r_1 - r_2 = 1\lambda$$

Το Μ ανήκει στην 1η υπερβολή (ενίσχυση) δεξιά της, γι' αυτό δεύει  
Αρα μεταξύ Μ και γέγοικα θέτου δεν υπάρχει άλλη υπερβολή  
ενίσχυσης.

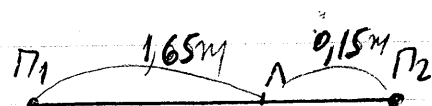
$$\text{B) } \pi_1 P - \pi_2 P = k\lambda \text{ ή } x - (1,8 - x) = k \cdot 0,5 \text{ ή } 2x - 1,8 = 0,5k$$

$$\Rightarrow x = 0,25k + 0,9 \quad \text{όε} \quad 0 \leq x \leq 1,8 \Rightarrow 0 \leq 0,25k + 0,9 \leq 1,8 \text{ ή } -0,9 \leq 0,25k \leq 0,9 \text{ ή } -3,6 \leq k \leq 3,6 \text{ ή } k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Αρα υπάρχουν 7 υπερβολές ενίσχυσης στην δέσση  $x = 0,25k + 0,9$ .

Γ.

$$\psi_A = 2 \cdot 0,02 \cos 2\pi \frac{1,65 - 0,15}{2 \cdot 0,5} \cos(20\pi t - 2\pi \frac{1,8}{2 \cdot 0,5})$$



$$\Rightarrow \psi_A = 0,04 \cos(3\pi) \cos(20\pi t - 3,6\pi)$$

$$\Rightarrow \psi_A = -0,04 \cos(20\pi t - 3,6\pi) \text{ ή } \psi_A = 0,04 \cos(20\pi t - 3,6\pi) \xrightarrow{t=0,555s}$$

$$\Rightarrow \psi_A = 0,04 \cos(8,5\pi) \Rightarrow \psi_A = 0,04 \text{ m}$$

$$\Delta) \pi_1 M - \pi_2 M = 1,3 - 0,8 = 0,5 = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 0,5 = (2k+1) \frac{v}{2f}$$

$$\text{ή } f' = (2k+1) \cdot 5 \rightarrow f' = 5 \text{ Hz}, 15 \text{ Hz}, 25 \text{ Hz}, \dots$$

$$\Delta f = f' - f, \quad \left. \begin{array}{l} \Delta f_{\text{m/4}} = f' - f = 5 - 10 = -5 \text{ Hz} \\ \Delta f_{\text{m/4}} = f' - f = 15 - 10 = +5 \text{ Hz} \end{array} \right\} \Delta f_{\text{m/4}} = \pm 5 \text{ Hz}$$